Funktionen

$X \times Y = \{\langle x,y\rangle \mid x \in X, y \in Y\}$

Erinnerung: Ein *Paar* ist definiert durch $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definition: Betrachte Mengen X und Y. Eine Teilmenge $G \subset X \times Y$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X\, \exists! y \in Y : \langle x, y\rangle \in G$$

heisst eine *Funktion.* Oft bezeichnen wir diese mit $g\colon X \to Y$ und schreiben für $\langle x, y\rangle \in G$ kurz $g(x) = y$.

Proposition-Definition: Zu jeder solchen Funktion g gehört ein *Definitionsbereich,* nämlich die Menge

$$\mathrm{Def}(G) = \mathrm{Def}(g) = X := \{x \in \bigcup\bigcup G \mid \exists y\colon \langle x, y\rangle \in G\}.$$

Folge: Eine Menge G ist eine Funktion genau dann wenn gilt: $\boxed{\forall x \in \mathrm{Def}(G)\ \exists!\, y : \langle x,y\rangle \in G}$. und $\boxed{G \subseteq (\bigcup\bigcup G) \times (\bigcup\bigcup G)}$.

Vorsicht: In dieser Theorie ist der Zielbereich der Funktion durch den Graphen nicht eindeutig bestimmt.

Proposition-Definition: Für jede solche Funktion und jeder Teilmenge $X' \subseteq \mathrm{Def}(g)$ erhalten wir die *auf X' eingeschränkte Funktion $g|X'$* mit dem Graphen

$$G \cap (X' \times \bigcup\bigcup G).$$

Klassenfunktionen

Definition: Betrachte eine Formel $\varphi(x,y)$ mit freien Variablen x und y, so dass wir beweisen können:

$$\forall x\, \exists! y\colon \varphi(x,y).$$

Die Abbildung F, welche in einem Modell unserer Theorie jedem x das durch diese Formel charakterisierte Element $F(x) := y$ zuordnet, heisst die durch φ bestimmte *Klassenfunktion* oder *Operation.*

Vorsicht: Dies ist keine Menge, also keine Funktion wie oben **innerhalb** unserer Theorie!

Vorsicht: Wenn man von einer Klassenfunktion spricht, meint man eigentlich die dahinterstehende Formel.

Beispiel: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$ einer Menge x ist charakterisiert durch die Formel

$$\mathcal{P}(x) = y \iff \varphi(x,y) \;:=\; (\forall z\colon z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x).$$

Beispiel: Die Vereinigungsmenge $\bigcup x$ einer Menge x ist charakterisiert durch die Formel

$$\bigcup x = y \iff \varphi(x,y) \;:=\; \big(\forall z\colon z \in y \longleftrightarrow (\exists t\colon t \in x \wedge z \in t)\big).$$

Ersetzungsaxiom: Für jede Klassenfunktion F und jede Menge A ist $\cancel{F(A)}$ eine Menge; genauer: Es existiert eine Menge B mit der Eigenschaft

$B = \{F(x) \mid x \in A\}$

$$\forall y\colon \big(y \in B \longleftrightarrow \exists x \in A\colon \varphi(x, y)\big).$$

Durch das Extensionalitätsaxiom ist diese eindeutig bestimmt.

Folge: Für jede Klassenfunktion F und jede Menge A ist $F|A$ eine Funktion, genauer: Es existiert genau eine Menge G, welche der Graph einer Funktion ist, und für die gilt

$$\forall x\, \forall y\colon \langle x, y\rangle \in G \longleftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x, y)).$$

$\leftarrow y = F(x)$

Bedeutung: Eine Klassenfunktion induziert also auf jeder Menge eine echte Funktion im Sinne unserer Theorie. Auf diese können wir alle Methoden der Mengenlehre anwenden, auf die Klassenfunktion dagegen nicht.

Beweis: Betrachte das Prädikat $\psi(x, z) :\Leftrightarrow \big(\exists y : \varphi(x, y) \wedge \langle x, y\rangle = z\big)$

Dieses definiert eine Klassenfunktion G, d.h. $\forall x\ \exists!\, z : \psi(x, z)$.

Ersetzungsaxiom $\Longrightarrow$ $G(A)$ ist eine Menge mit:

$$\forall z : z \in G(A) \longleftrightarrow \exists x \in A : \psi(x, z)$$
$$\longleftrightarrow \exists x \in A\ \exists y : \varphi(x, y) \wedge \langle x, y\rangle = z$$
$$\longleftrightarrow \exists x \in A : \langle x, F(x)\rangle = z$$

D.h. $G(A) = \{\langle x, F(x)\rangle \mid x \in A\}$

qed.

Variante: Wendet man das Obige an auf Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n)$, so erhält man n-stellige Funktionen und Klassenfunktionen.

Ordnungsrelationen

Definition: Eine *Ordnung* oder *Partialordnung* auf einer Menge X ist eine zweistellige Relation $\leqslant$ mit den Bedingungen:

$$\begin{array}{rll}
\forall x \in X: & x \leqslant x & \text{(Reflexivität)} \\
\forall x, y \in X: & x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant x \ \longrightarrow \ x = y & \text{(Antisymmetrie)} \\
\forall x, y, z \in X: & x \leqslant y \wedge y \leqslant z \ \longrightarrow \ x \leqslant z & \text{(Transitivität)}
\end{array}$$

Eine *Totalordnung* oder *lineare Ordnung* ist eine Ordnung, für die zusätzlich gilt:

$$\forall x, y \in X: \quad x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x. \qquad \text{(Totalität)}$$

Im folgenden fixieren wir eine Menge X mit einer Ordnung $\leqslant$.

Definition: Für alle $x, y \in X$ definieren wir

$$\begin{array}{lcl}
x \geqslant y & :\Longleftrightarrow & y \leqslant x \\
x < y & :\Longleftrightarrow & (x \leqslant y) \wedge (x \neq y) \\
x > y & :\Longleftrightarrow & y < x
\end{array}$$

Die Relation $<$ heisst die zu $\leqslant$ gehörende *strikte Ordnung.*

Übung: Formuliere äquivalente Axiome für $<$ anstatt $\leqslant$.

Definition: Ein Element $x \in X$ mit der Eigenschaft

$\forall y \in X\colon\ x \leqslant y$	heisst ein *kleinstes Element* von X.
$\forall y \in X\colon\ y \leqslant x$	heisst ein *grösstes Element* von X.
$\forall y \in X\colon\ y \leqslant x \longrightarrow y = x$	heisst ein *minimales Element* von X.
$\forall y \in X\colon\ x \leqslant y \longrightarrow y = x$	heisst ein *maximales Element* von X.

Proposition: Existiert ein kleinstes (bzw. grösstes) Element, so ist es eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien x, x' kleinste Elemente, dann gilt $x \leq x' \leq x \Rightarrow x = x'$. qed.

Rest analog.

Proposition: Ist $\leqslant$ eine Totalordnung, so gilt:

(a) Ein Element $x \in X$ ist ein kleinstes Element genau dann, wenn es minimal ist.

(b) Ein Element $x \in X$ ist ein grösstes Element genau dann, wenn es maximal ist.

Prop.: Jedes kleinste Element ist minimal.
Jedes grösste Element ist maximal.

Beweis: x minimal $\Rightarrow \forall y: x \leq y \vee y \leq x$ wegen Totalität.

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$\forall y: y \not\leq x \Rightarrow \forall y: x \leq y. \Rightarrow x$ kleinstes.

Rest analog. qed.

Vorsicht: Ist $\leqslant$ keine Totalordnung, so kann es mehrere minimale (bzw. maximale) Elemente geben.

Beispiele:

(a) $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ist eine Totalordnung ohne minimales oder maximales Element.

(b) $([0, \infty[, \leqslant)$ ist eine Totalordnung mit minimalem Element 0 aber ohne maximales Element.

(c) $([0, 1], \leqslant)$ ist eine Totalordnung mit minimalem Element 0 und maximalem Element 1.

(d) $(\varnothing, \leqslant)$ ist eine Totalordnung ohne minimales oder maximales Element.

(e) Die Menge aller abzählbar unendlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Inklusionsrelation $\subseteq$ ist eine nicht totale Partialordnung ohne minimales oder maximales Element.

Sei jetzt X eine Menge mit mehr als einem Element.

(f) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist eine nicht totale Ordnung mit ~~minimalem~~ kleinstem Element $\varnothing$ und ~~maximalem~~ größtem Element X.

(g) $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}, \subseteq)$ ist nicht totale Ordnung ohne ~~minimales~~ kleinstes oder ~~maximales~~ größtes Element.

Für jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ minimal

und $X \setminus \{x\}$ maximal.

Betrachte eine Menge X mit Partialordnung $\leqslant$ und eine Teilmenge $Y \subseteq X$.

Proposition-Definition:

(a) $\leqslant \cap (Y \times Y)$ ist eine Partialordnung auf Y, genannt die *auf Y induzierte Partialordnung* $\leqslant |Y$.

(b) Ist $\leqslant$ eine Totalordnung, so ist $\leqslant |Y$ eine Totalordnung.

(c) Ist $\leqslant |Y$ eine Totalordnung, so heisst Y eine *Kette.*

(d) Ein Element $x \in X$ heisst *obere Schranke* von Y, falls gilt $\forall y \in Y : y \leqslant x$.

(e) Ein Element $x \in X$ heisst *untere Schranke* von Y, falls gilt $\forall y \in Y : x \leqslant y$.

(f) Die Menge Y heisst ein *Anfangssegment von X*, falls gilt $\forall y \in Y\, \forall x \in X : (x \leqslant y \longrightarrow x \in Y)$.

(f) Jedes $x \in X$ bestimmt die Anfangssegmente

$$\begin{aligned} X_{\leqslant x} &:= \{x' \in X \mid x' \leqslant x\}, \\ X_{<x} &:= \{x' \in X \mid x' < x\}. \end{aligned}$$

Wohlordnungen

Für das folgende siehe auch [Ebbinghaus: Einführung in die Mengenlehre, Kapitel VI].

Definition: Eine *Wohlordnung* auf einer Menge X ist eine Totalordnung, für die jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Beispiel: (a) Für jede natürliche Zahl n die Menge $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit der üblichen Relation $\leqslant$.

(b) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der üblichen Relation $\leqslant$. *(später)*

Proposition: Jede Teilmenge X' einer Wohlordnung X ist eine Wohlordnung.

Beweis: $Y \subseteq X'$, $Y \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \neq Y \subseteq X \Rightarrow Y$ besitzt ein kleinstes Element. qed.

Erinnerung:

Beweis durch vollständige Induktion: Um für jede natürliche Zahl n eine Aussage $A(n)$ zu beweisen, genügt es, für jedes n zu zeigen:

$(* n)$ Gilt $A(n')$ für alle $n' \geqslant 0$ mit $n' < n$, so gilt auch $A(n)$.

Beweis: Sei $T := \{n \mid A(n)\}$. Ist $T \neq \mathbb{N}$, dann hat $\mathbb{N} \setminus T$ ein kleinstes Element n. Dann gilt $\forall n' < n$: $n' \in T \Rightarrow A(n')$ $\Big\} \overset{(*n)}{\Longrightarrow} A(n)$. ↯ qed.

Konstruktion durch Rekursion: Um für jede natürliche Zahl n ein mathematisches Objekt $B(n)$ zu konstruieren, genügt es, für jedes n

eine Konstruktion von $B(n)$ unter Benützung von $B_(n')$ für alle $n' < n$ anzugeben.

Satz: *(Induktion über eine Wohlordnung)* Für jede wohlgeordnete Menge X und jedes einstellige Prädikat P gilt

$$\underbrace{\big[\forall x \in X\colon\ (\forall y \in X_{<x}\colon P(y)) \longrightarrow P(x)\big]}_{\text{Induktionsschritt,}} \longrightarrow \big[\forall x \in X\colon\ P(x)\big].$$

Beweis: Wenn nicht, sei $x \in X$ das kleinste Gegenbeispiel. Dann gilt $\forall y \in X_{<x}: P(y)$. Also gilt $P(x)$ $\Longrightarrow$ $\lightning$ qed.

Rekursionstheorem: Für jede wohlgeordnete Menge X und jede zweistellige Klassenfunktion F existiert eine eindeutige Funktion f mit Definitionsbereich X, so dass gilt:

$$\boxed{\forall x \in X\colon f(x) = F(x, f|X_{<x}).}$$

Bemerkung: Eigenschaften der so konstruierten Funktion beweist man durch Induktion über die Wohlordnung: Sei $P(x)$ ein Prädikat (eventuell mit Parametern) mit der Eigenschaft

$$\underbrace{\forall x \in X\colon \big(\forall y \in X_{<x}\colon P(f(y))\big) \longrightarrow P(f(x)).}_{\text{Induktionsschritt mit } P(f(.)) \text{ anstelle } P(.)}$$

Mit Induktion folgt dann $\forall x \in X\colon P(f(x))$.

Beispiel: Sei Z eine Menge, so dass für jedes $x \in X$ und jede Funktion g mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq Y$ gilt $\mathrm{Bild}(F(x,g)) \subseteq Y$. Dann gilt $\mathrm{Bild}(f) \subseteq Z$.

Direkte Folge für $P(x) := (x \in Z)$.